数理解析研究所講究録
142巻 1972年 29-42

差分不等式の応用

早大理工　杉山昌平

離散変数に対して定義された関数系によって満たされる不等式から得られる性質を用いて差分方程式系の安定性を説明することを目的とする．一部の結果は数値解析の誤差評価に応用されることを期待している．

1. 準備

点 $t_0+k\ (k=0,1,\cdots,m\leq\infty)$ の集合を I_m で表わす．

補題 1. $g(t,r)$ は $t\in I_N$, $0\leq r<\infty$ で定義され，固定した各 t に対し r について非減少とする．このとき，$u(t)$, $r(t)$ がそれぞれ関係

$$u(t+1)\leq g(t,u(t)),\quad r(t+1)=g(t,r(t)),\quad t\in I_N$$

を満たすならば，$u(t_0)\leq r(t_0)$ のとき不等式 $u(t)\leq r(t)$, $t\in I_{N+1}$ が成立する．

系 1. $g(t,r)$ は $t\in I_N$, $0\leq r<\infty$ で定義され，$r+g(t,r)$ は固定した各 t に対し r について非減少とする．このとき，$u(t)$, $r(t)$ がそれぞれ関係

$$\Delta u(t)\leq g(t,u(t)),\quad \Delta r(t)=g(t,r(t)),\quad t\in I_N$$

を満たすならば，$u(t_0)\le x(t_0)$ のとき不等式 $u(t)\le x(t)$，$t\in I_{N+1}$ が成立する．　ここで $\Delta\varphi(t)=\varphi(t+1)-\varphi(t)$ とする．

系2．$k(t)>0$ とし，$u(t)$ が不等式

$$u(t+1)\le k(t)u(t)+p(t),\quad t\in I_N$$

を満たすならば，$u(t)$ に対する次の評価が成立する：

$$u(t)\le u(t_0)\prod_{s=t_0}^{t-1}k(s)+\sum_{s=t_0}^{t-1}p(s)\prod_{\tau=s+1}^{t-1}k(\tau),\ t\in I_{N+1}.$$

証明　差分方程式

$$x(t+1)=k(t)x(t)+p(t),\quad x(t_0)=u(t_0)$$

の解

$$x(t)=u(t_0)\prod_{s=t_0}^{t-1}k(s)+\sum_{s=t_0}^{t-1}p(s)\prod_{\tau=s+1}^{t-1}k(\tau)$$

を直接に求めてから補題1を用いる．

次の直接法は上の解を求める方法を暗示している。与えられた不等式の両辺に $\prod_{s=t_0}^{t}k(s)^{-1}$ を乗じてから t について t_0 から $t-1$ まで加え，その結果において $\prod_{s=t_0}k(s)$ を乗じることによって求める不等式が得られる．

系3．$K(t)\ge 0$ とし，$u(t)$ が不等式

$$u(t)\le f(t)+\sum_{s=t_0}^{t-1}(K(s)u(s)+p(s)),\quad t\in I_N$$

を満たすならば，$u(t)$ に対する次の評価が成立する：

$$u(t)\le f(t)+\sum_{s=t_0}^{t-1}K(s)f(s)\prod_{\tau=s+1}^{t-1}(1+K(\tau))+\sum_{s=t_0}^{t-1}p(s)\prod_{\tau=s+1}^{t-1}(1+K(\tau)),$$

$t\in I_N$ が成立する．

特に，$f(t)\equiv u_0\ge 0$（定数），$p(t)\ge 0$ ならば次の不等式

が成立する：

$$u(t) \le u_0 \prod_{s=t_0}^{t-1}(1+K(s)) + \sum_{s=t_0}^{t-1} p(s) \prod_{\tau=s+1}^{t-1}(1+K(\tau))$$
$$\le u_0 \exp\left(\sum_{s=t_0}^{t-1} K(s)\right) + \sum_{s=t_0}^{t-1} p(s) \exp\left(\sum_{\tau=s+1}^{t-1} K(\tau)\right).$$

上の不等式は微分方程式論における Gronwall の不等式に対応している．

証明　$\varphi(t) = \sum_{s=t_0}^{t-1}(K(s)u(s) + p(s))$ とおけば

$$\varphi(t+1) \le (1+K(t))\varphi(t) + K(t)f(t) + p(t)$$

が成立するから補題1，系2を適用すればよい．

$f(t) \equiv u_0$（定数）のとき，

$$u_0 + u_0 \sum_{s=t_0}^{t-1} K(s) \prod_{\tau=s+1}^{t-1}(1+K(\tau))$$
$$= u_0 + u_0 \sum_{s=t_0}^{t-1}\left(\prod_{\tau=s}^{t-1}(1+K(\tau)) - \prod_{\tau=s+1}^{t-1}(1+K(\tau))\right)$$
$$= u_0 \prod_{s=t_0}^{t-1}(1+K(s))$$

が得られる。ただし，$\prod_{s=t}^{t-1} u(s) = 1$ を用いる．さらに，$u_0 \ge 0$，$p(t) \ge 0$ のときは明かである．

補題2．$f(t, x)$，$g(t, |x|)$ は $t \in I_N$，$|x| < \infty$ で定義され，$r + g(t, r)$ は固定された各 t に対して r について非減少とする．このとき，任意の t，x に対して $|f(t, x)| \le g(t, |x|)$ が満たされるならば，$|x_0| \le r_0$ のとき不等式 $|x(t)| \le r(t)$，$t \in I_{N+1}$ が成立する．ただし，$x(t)$，$r(t)$ はそれぞれ次の差分方程式の解である：

$$\Delta x(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in I_N,$$

$$\Delta r(t) = g(t,\ r(t)),\quad x(t_0) = r_0,\qquad t \in I_N.$$

補題3. $n \times n$ 行列 $A(t)$ は $t \in I_\infty$ で定義され，$\det A(t) \neq 0$, $t \in I_\infty$ とする．線形系 $x(t+1) = A(t)x(t)$ の零解が一様漸近安定ならば，任意の $t, s \in I_\infty$ に対して

$$\| X(t, s) \| \leq K e^{-\alpha(t-s)},\qquad t \geq s \geq t_0$$

を満たす正の定数 K, α が存在する．ただし，$X(t, s)$ は基本行列である．

2. 漸近的挙動

以下では簡単のために $t_0 = 0$ とする．

定理 **2. 1.** $f(t, x)$ は $t \in I_\infty$, $|x| < \infty$ において，$g(t, r)$ は $t \in I_\infty$, $0 \leq r < \infty$ において定義され，不等式 $|f(t, x)| \leq g(t, |x|)$ が任意の t, x について満たされているとする．また，$g(t, r)$ は固定した各 t に対して r について非減少とする．このとき，もし，差分方程式

(2.1) $\qquad \Delta r(t) = g(t,\ r(t)),\quad r(t_0) = r_0,\quad t \geq t_0$

のすべての解が有界ならば，差分方程式

(2.2) $\qquad \Delta x(t) = f(t,\ x(t)),\quad x(t_0) = x_0,\quad t \geq t_0$

の解は $|x_0| \leq r_0$ のとき $t \to \infty$ に関する極限をもつ．

証明　補題2から $|x(t)| \leq r(t)$, $t \geq t_0$ が成立する．任意の $t_1, t_2 > t_0$ （$t_1 < t_2$）に対し（仮定より）上の結果を用いると

$$|x(t_2)-x(t_1)| \le \sum_{s=t_1}^{t_2-1} |f(s, x(s))|$$
$$\le \sum_{s=t_1}^{t_2-1} g(s, r(s)) = r(t_2) - r(t_1)$$

が成立し，$r(t)$ は非減少かつ上に有界であることから直に結果が得られる．

定理 2.2. $f_i(t, x)$ $(i=1, 2)$, $g(t, |x|)$ は $t \in I_\infty$, $|x| < \infty$ で定義され，$r + g(t, r)$ は固定された各 t に対して r について非減少とする．さらに，任意の t, x, y に対して

$$|x - y + f_1(t, x) - f_2(t, y)| \le |x-y| + g(t, |x-y|)$$

が成立するものとする．このとき，差分方程式

$$\Delta r(t) = g(t, r(t)), \quad r(t_0) = r_0,$$
$$\Delta x(t) = f_i(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_i \quad (i=1, 2)$$

の解をそれぞれ $r(t)$, $x_i(t)$ $(i=1, 2)$ とすれば，$|x_1 - x_2| \le r_0$ のとき次の不等式が成立する：

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le r(t), \quad t \ge t_0.$$

証明　$u(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$ とおけば仮定から

$$\Delta u(t) = |x_1(t) - x_2(t) + f_1(t, x_1(t)) - f_2(t, x_2(t))| - |x_1(t) - x_2(t)|$$
$$\le g(t, |x_1(t) - x_2(t)|) = g(t, u(t)).$$

よって，補題 1 から $|x_1 - x_2| \le r_0$ のとき $|x_1(t) - x_2(t)| = u(t) \le r(t)$, $t \ge t_0$ が得られる．

定理 2.3. $g(t, r)$ は $t \in I_\infty$, $0 \le r < \infty$ で定義され，$g(t$

$0) \equiv 0$, $x + g(t, x)$ は固定した各 t に対して x について非減少とする．$f(t, x)$ は $t \in I_\infty$, $|x| < \rho$ で定義され，不等式

$$|x + f(t, x)| \leq |x| + g(t, |x|), \quad t \in I_\infty, \quad |x| < \rho$$

を満たしているとする．このとき，(2.1) の零解の安定性から (2.2) の零解の安定性が得られる．

証明　(2.1) の零解 $r(t) \equiv 0$ が安定であるとすれば，任意の $\varepsilon \in (0, \rho)$, $t_0 \in I_\infty$ に対して $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ が存在して $r_0 < \delta$ ならば $r(t, t_0, r_0) < \varepsilon$, $t \geq t_0$ が成立する．このとき，上の ε, δ を用いて $|x_0| < \delta$ ならば $|x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$, $t \geq t_0$ が成立する．

もし，成立しないとすれば，1つの整数 $t_1 \geq t_0$ が存在して次の不等式が成立する：

$$|x(t_1 + 1)| \geq \varepsilon, \quad |x(t)| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, t_1] \cap I_\infty.$$

$u(t) = |x(t)|$ とおけば上のような t に対して仮定から

$$\Delta u(t) = |x(t) + f(t, x(t))| - |x(t)| \leq g(t, u(t)).$$

したがって，補題2から $r_0 = |x_0| = |x(t_0)|$ とすれば

$$|x(t, t_0, x_0)| \leq r(t, t_0, r_0), \quad t \in [t_0, t_1] \cap I_\infty$$

が成立する．このとき $t = t_1 + 1$ に対して

$$\varepsilon \leq |x(t_1 + 1)| \leq r(t_1 + 1, t_0, r_0) < \varepsilon$$

となり矛盾である．この他の安定性に関してもほぼ同様にして証明される．

3. 摂動系

この節では摂動系

(3.1) $\quad x(t+1)=A(t)x(t)+F(t,x(t)),\quad x(t_0)=x_0,\quad t\geq t_0$

または

(3.2) $\quad \Delta x(t)=A(t)x(t)+F(t,x(t)),\quad x(t_0)=x_0,\quad t\geq t_0$

の解と対応する線形系

(3.3) $\quad x(t+1)=A(t)x(t),\quad x(t_0)=x_0,\quad t\geq t_0$

(3.4) $\quad \Delta x(t)=A(t)x(t),\quad x(t_0)=x_0,\quad t\geq t_0$

の解の間の関係を示すことにする.

定理3.1. 次の3条件を仮定する:

(i) $A(t)$ は $n\times n$ 行列で $\det A(t)\neq 0,\ t\in I_\infty$ とし, 線形系 (3.3) の基本行列を $X(t)$ ($X(t_0)=E$) とする. さらに, 系 (3.3) の解は有界とする;

(ii) $F(t,x)$ は $t\in I_\infty$, $|x|<\infty$ で定義され, $F(t,0)\equiv 0$ かつ不等式

$$|X(t+1)^{-1}F(t,X(t)y)|\leq g(t,|y|)$$

を満たしている. ただし, $g(t,r)$ は $t\in I_\infty$, $0\leq r<\infty$ で定義され, $g(t,r)$ は固定した各 t に対して r について非減少とする;

(iii) (2.1) と (3.3) のすべての解は有界である.

このとき次の結果が成立する:

(1)　系(3.1)の任意の解 $x(t)$ に対して線形系(3.3)の1つの解 $y(t)$ が存在して

$$\lim_{t\to\infty}(x(t)-y(t))=0$$

が成立する；

(2)　系(3.3)の有界性と安定性から系(3.1)の解の有界性と対応する安定性が得られる．

証明 (1)　変換　$x(t)=X(t)v(t)$ を施すと系(3.1)は

$$\Delta v(t)=X(t+1)^{-1}F(t,X(t)v(t))$$

となるから仮定(ii)を用いると不等式

$$\Delta|v(t)|\leq g(t,|v(t)|)$$

が成立する．よって，定理2.1により $v(t)=X(t)^{-1}x(t)$ は $t\to\infty$ のとき極限をもつ．それを ξ とすれば，$y(t)=X(t)\xi$ は系(3.3)の1つの解であり，$\|X(t)\|$ の有界性から

$$\lim_{t\to\infty}(x(t)-y(t))=\lim_{t\to\infty}X(t)(v(t)-\xi)=0$$

が成立する．

(2)　上と同じ変換を用いると，上に説明した結果から

$$|x(t)|\leq\|X(t)\||v(t)|\leq\|X(t)\|r(t),\quad t\geq t_0.$$

となり，$X(t)$ の性質から求める結果が得られる．

定理3.2. 次の2条件を仮定する：

(i) $A(t)$ は $n\times n$ 行列であり，1つの $t_0\in I_\infty$ に対して

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ \frac{1}{t-t_0}\sum_{s=t_0}^{t-1}(\|E+A(s)\|-1)<0$$

が成立する；

(ii) $F(t,x)$ は $t\in I_\infty$，$|x|<\rho$ で定義され，任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta=\delta(\varepsilon)$ が存在して $|x|<\delta$ ならば $t\in I_\infty$ について一様に $|F(t,x)|\leq\varepsilon|x|$ が成立する．

このとき，系(3.2)の解 $x(t)$ に対して

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=0$$

が成立する．

証明 仮定(i)から十分小さい $\varepsilon>0$ に対して

$$\lim_{t\to\infty}\exp\left(\varepsilon(t-t_0)+\sum_{s=t_0}^{t-1}(\|E+A(s)\|-1)\right)=0$$

が成立するから

$$\max_{t\geq t_0}\left(\exp\left(\varepsilon(t-t_0)+\sum_{s=t_0}^{t-1}(\|E+A(s)\|-1)\right)\right)\leq K$$

を満たす定数 K が存在する．ここで

$$K\delta_1\leq\delta(\varepsilon)$$

を満たす δ_1 を選ぶと，系(3.2)の解 $x(t)\equiv x(t,t_0,x_0)$ に対して $|x_0|<\delta_1$ ならば $|x(t)|<\delta$，$t\geq t_0$ が成立する．

もし，成立しないとすれば，1つの $t_1\geq t_0$ および解 $x(t)$ が存在して

$$|x(t_1+1)|\geq\delta,\quad |x(t)|<\delta,\quad t\in[t_0,t_1]\cap I_\infty$$

が成立する．$u(t)=|x(t)|$ とおけば仮定(ii)から

$$\Delta u(t) = |x(t) + A(t)x(t) + F(t, x(t))| - |x(t)|$$
$$\leq (\|E + A(t)\| - 1 + \varepsilon)\, u(t).$$

したがって，

$$u(t+1) \leq (\|E + A(t)\| + \varepsilon)\, u(t), \quad t \in [t_0, t_1] \cap I_\infty.$$

これよりただちに次の不等式が得られる：

$$u(t) \leq u(t_0) \prod_{s=t_0}^{t-1} (\|E + A(s)\| + \varepsilon)$$
(3.5)
$$\leq |x_0| \exp\left(\varepsilon(t-t_0) + \sum_{s=t_0}^{t-1} (\|E + A(s)\| - 1)\right).$$

よって，$t = t_1 + 1$ に対して次の矛盾が生ずる：

$$\delta \leq |x(t_1+1)| \leq |x_0| \exp\left(\varepsilon(t_1+1-t_0) + \sum_{s=t_0}^{t_1} (\|E + A(s)\| - 1)\right)$$
$$< K\delta_1 \leq \delta.$$

したがって，$|x(t)| < \delta$ がすべての $t \geq t_0$ に対して成立し，さらに，不等式(3.5)がすべての $t \geq t_0$ に対して成立するから $\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0$ が得られる．

定理3.3．次の3条件を仮定する：

(i)　$n \times n$ 行列 $A(t)$ は $t \in I_\infty$ で定義され，不等式

$$\|E + A(t)\| - 1 < -\sigma, \quad t \in I_\infty$$

が成立する．ただし，σ は正の定数；

(ii)　$F(t, x)$ は前定理の仮定を満たしている；

(iii)　$G(t, x)$ は $t \in I_\infty$，$|x| < \rho$ で定義され，不等式

$$|G(t, x)| \leq \gamma(t), \quad t \in I_\infty, \quad |x| < \rho$$

が満たされる．ただし，$\lim_{t\to\infty}\gamma(t)=0$ とする．

このとき，差分方程式

(3.6) $$\Delta x(t)=A(t)x(t)+F(t,x(t))+G(t,x(t)),\quad x(t_0)=x_0$$

の解 $x(t)$ に対して

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=0$$

が成立する．

証明　任意の $\varepsilon\in(0,\ \min(\sigma,\rho))$ に対して $\delta(\varepsilon)(\leq\varepsilon)$，$T(\varepsilon)$ が存在し，任意の $t_0\geq T(\varepsilon)$ に対して

$$\sum_{s=t_0}^{t-1}\gamma(s)\exp(-(\sigma-\varepsilon)(t-s-1))<\frac{1}{2}\delta(\varepsilon)=\delta_1,\quad t\geq t_0$$

が成立する．このとき，系 (3.6) の解 $x(t)$ に対して $|x_0|<\delta_1$ ならば $|x(t)|<\delta(\varepsilon)$，$t\geq t_0$ が成立する．

もし，成立しないとすれば 1 つの整数 $t_1\geq t_0$ が存在して

$$|x(t_1+1)|\geq\delta(\varepsilon),\quad |x(t)|<\delta(\varepsilon),\quad t\in[t_0,t_1]\cap I_\infty$$

となる．$u(t)=|x(t)|$ とおけば仮定から

$$\begin{aligned}\Delta u(t)&=|x(t)+A(t)x(t)+F(t,x(t))+G(t,x(t))|-|x(t)|\\&\leq(\|E+A(t)\|-1+\varepsilon)u(t)+\gamma(t).\end{aligned}$$

したがって，

$$u(t+1)\leq(\|E+A(t)\|+\varepsilon)u(t)+\gamma(t).$$

よって，補題 1，系 2 を用いると

(3.7) $$\begin{aligned}u(t)&\leq u(t_0)\prod_{s=t_0}^{t-1}(\|E+A(s)\|+\varepsilon)+\sum_{s=t_0}^{t-1}\gamma(s)\prod_{\tau=s+1}^{t-1}(\|E+A(\tau)\|+\varepsilon)\\&\leq|x_0|\exp(-(\sigma-\varepsilon)(t-t_0))+\sum_{s=t_0}^{t-1}\gamma(s)\exp(-(\sigma-\varepsilon)(t-s-1)).\end{aligned}$$

が成立する．ここで $t=t_1+1$ とおけば矛盾が生ずる：$\delta \le |x(t_1+1)| < \delta_1 + \delta_1 = \delta$．よって，すべての $t \ge t_0$ に対して $|x(t)| < \delta(\varepsilon)$ が成立し，(3.7) もすべての $t \ge t_0$ に対して成立する．よって，$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ が得られる．

定理 3.4．　次の3条件を仮定する：

(i)　$n \times n$ 行列 $A(t)$ は $t \in I_\infty$ で定義され，$\det A(t) \neq 0$ とする．さらに線形系 (3.3) の零解は指数的漸近安定とする；

(ii)　$F(t, x)$ は $t \in I_\infty$，$|x| < \rho$ で定義され，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta(\varepsilon)$，$T(\varepsilon)$ が存在して $|x| < \delta(\varepsilon)$，$t \ge T(\varepsilon)$ ならば $|F(t, x)| \le \varepsilon |x|$ が成立する；

(iii)　$G(t, x)$ は $t \in I_\infty$，$|x| < \rho$ で定義され，x について一様に　$|G(t, x)| \le \gamma(t)$，$t \in I_\infty$ が成立する．ただし，$\gamma(t) \to 0\ (t \to \infty)$ とする．

このとき，T_0，δ_1 が存在して任意の $t_0 \ge T_0$，$|x_0| < \delta_1$ に対して

$$x(t+1) = A(t)x(t) + F(t, x(t)) + G(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

の解 $x(t)$ について $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ が成立する．

証明　線形系 (3.3) の基本行列 $X(t)$ ($X(t_0) = E$) に対して $\|X(t)\| \le K e^{-\alpha(t-t_0)}$，$t \ge t_0$ を満たす定数 $K, \alpha > 0$ が存在する．任意の $\varepsilon \in (0, \min(\rho, \alpha/Ke^{\alpha}))$ に対して $T(\varepsilon)$ を十分大にとり，任意の $t \ge t_0 \ge T(\varepsilon)$ に対して

$$\sum_{s=t_0}^{t-1}\gamma(s)\exp\left(-(\alpha-Ke^{\alpha}\varepsilon)(t-s-1)\right)<\frac{1}{2}\delta(\varepsilon)=\delta_1$$

が成立するようにする．このとき，$t\geq t_0$，$|x_0|<\delta_1$ に対して $|x(t)|<\delta(\varepsilon)$ である限り

$$x(t)=X(t)x_0+\sum_{s=t_0}^{t-1}X(t)X(s+1)^{-1}(F(s,x(s))+G(s,x(s)))$$

となるから仮定から

$$|x(t)|\leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}|x_0|+\sum_{s=t_0}^{t-1}Ke^{-\sigma(t-s-1)}(\varepsilon|x(s)|+\gamma(s)).$$

$u(t)=|x(t)|e^{\alpha t}$ とおけば上の不等式は

$$u(t)\leq Ku(t_0)+\sum_{s=t_0}^{t-1}(Ke^{\alpha}\varepsilon u(s)+Ke^{\alpha(s+1)}\gamma(s))$$

となり，補題1，系3を用いると

$$u(t)\leq Ku(t_0)\exp(Ke^{\alpha}\varepsilon(t-t_0))$$
$$+K\sum_{s=t_0}^{t-1}\gamma(s)\exp\left(-(\alpha-Ke^{\alpha}\varepsilon)(t-s-1)\right),$$

したがって，

$$|x(t)|\leq K|x_0|\exp\left(-(\alpha-Ke^{\alpha}\varepsilon)(t-t_0)\right)$$
$$+K\sum_{s=t_0}^{t-1}\gamma(s)\exp\left(-(\alpha-Ke^{\alpha}\varepsilon)(t-s-1)\right)$$

が得られる．上の不等式を用いると前と同様にして $|x_0|<\delta_1$ のとき $|x(t)|<\delta(\varepsilon)$，$t\geq t_0$ の成立することがわかる。上の不等式から $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$ となることは前と同様である．

結び．差分方程式に関する結果が微分方程式や関数微分方程式における多くの結果と対応していることは上に述べたことから明かになっているが，その類似性だけでなく

微分方程式の解に対する近似を考えたとき，その誤差の満たす関係式との類似性，したがって，その誤差に対する評価式等の得られることが予想され，上に説明したいくつかの結果が誤差解析に用いられるのではないかと考えている。

なお，微分方程式や関数微分方程式に関する対応した結果については文献[1]，[2]を参照されたい，さらに，[3]においてはここに述べたもの以外の多くの結果が応用とともに詳細に説明されているので参考になると思われる。

参考文献

[1] A. Halanay: Differential equations. Stability, Oscillations, Time-lags. Acad. Press, 1966.

[2] V. Lakshmikantham and S. Leela: Differential and integral inequalities, I. Acad. Press, 1969.

[3] P. Vidal: Non-linear sampled-data systems. Gordon and Breach, 1969.